Niveau(x) d'enseignement : 0 Numéro ISN : 9475
Centre d'intérêt : 841

Sierpinska, Anna

Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique / par Anna Sierpinska. -- Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation, 1990.

24 f. ; 22 cm. -- (Séminaire sur la représentation ; 49)

"La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR". Bibliogr. : f. 24.

Vedette(s)-secondaire(s) : Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation.

Descripteur(s) : Didactique * Mathématiques * Méthode de recherche * Epistémologie * Evaluation de cours

Dans cette recherche, l'auteure développe une méthode pour l'évaluation des leçons de mathématiques en s'appuyant sur une méthodologie de recherche en didactique des mathématiques où la notion d'obstacle épistémologique joue le rôle "d'outil fondamental". Cette méthode est ensuite appliquée dans l'analyse d'une leçon particulière sur la notion de limite d'une suite numérique. Cette analyse s'effectue en trois étapes. La première étape est une première analyse globale qui consiste à la découverte du plan de la leçon, c'est-à-dire la division de la leçon en phases qui se concentrent sur un même sujet. La deuxième étape est une analyse locale qui consiste à analyser les prises de parole par l'enseignant ou les élèves dans chacune des phases de la leçon. Finalement, la dernière étape est une deuxième analyse globale par laquelle on cherche à catégoriser les "sujets locaux" de la leçon, les "références" et les "items" et à évaluer les catégories utilisées à l'aide d'une analyse épistémologique de la notion de limite qui explicite les conditions de sa compréhension.

Type de document :

2.50

9475

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHE SUR
L'APPRENTISSAGE ET LE DÉVELOPPEMENT EN ÉDUCATION

cirade

Université du Québec à Montréal

9475

Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique

par Anna Sierpinska
Institut de mathématiques
de Varsovie
Pologne

Séminaire sur la Représentation
1er juin 1990 - n° 40

CIRADE, UQAM, septembre 1990

Note : La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR

Les abréviations suivantes seront utilisées dans le texte qui suit: OE = obstacle épistémologique; C = compréhension; r(EO) = domaine de recherche en didactique des mathématiques où la notion d'OE est utilisée comme outil fondamental.

I- INTRODUCTION

Je vais parler de méthodologie de recherche non pas «sur les obstacles épistémologiques» mais de recherche en didactique des mathématiques où la notion d'OE joue le rôle d'outil fondamental.

Méthodologie est définie habituellement soit comme un ensemble de méthodes, règles et postulats d'un domaine de recherche, soit comme une analyse de principes et procédures de recherche dans un domaine particulier. Il semble que cette analyse de principes est censée d'expliciter les engagements ontologiques et épistémologiques des praticiens du domaine de recherche en question ainsi que d'identifier les catégories de pensée fondamentales pour ce domaine.

Dans ce qui suit je vais donc essayer de verbaliser la philosophie implicite de la r(EO), en montrant en même temps qu'il y a au moins deux catégories de pensée fondamentales pour la r(EO), notamment les notions d'OE et de compréhension. Je vais aussi considérer les buts de la r(EO) et les méthodes utilisées pour les atteindre. Un des buts de la r(EO) est d'évaluer les enseignements et les apprentissages. Une méthode pour évaluation des leçons des mathématiques sera développée avec plus de détails et appliquée dans l'analyse d'une leçon particulière sur la notion de limite d'une suite numérique.

II- LA PHILOSOPHIE DE r(EO)

La philosophie de r(EO) est essentiellement anti-positiviste (cf. Moscovici, 19[illegible]). Elle admet qu'il n'y a pas de transition continue entre la pensée courante et la pensée scientifique. Cette dernière va contre la pensée courante, elle doute des évidences, elle pose des questions là où la pensée courante se satisfait des recettes, elle veut savoir non seulement «comment faire» mais aussi «pourquoi faire ainsi», elle se moque des habitudes intellectuelles.

Pour un praticien de r(EO) la signification d'un concept n'est pas totalement déterminée par sa définition (actuellement admise par la communauté scientifique). On

admet que cette signification est une résultante de son histoire, de ces applications, de la place du concept dans la théorie d'aujourd'hui. On dit que **la compréhension d'un concept scientifique demande le franchissement d'un certain nombre d'obstacles épistémologiques.**

Ce postulat est presque explicite dans le livre de Werner Heisenberg (1969), «Der Teil und das Ganze», où il discute le problème de compréhension en la physique moderne et polémise avec la philosophie positiviste. Il y rapporte le souvenir de Niels Bohr d'un symposium sur la philosophie des sciences tenu à Copenhague. La plupart des participants étaient des positivistes influencés par les idées du «Cercle de Vienne». «J'avais essayé – dit Bohr – de raconter à ces philosophes notre interprétation de la théorie des quanta. Après ma conférence, il n'y avait pas d'opposition, pas de questions difficiles! Mais c'est exactement cela qui m'avait inquiété le plus. Si, au début, on n'est pas choqué par la théorie des quanta, c'est impossible qu'on l'ait comprise».

C'est un trait caractéristique de la philosophie positiviste que de dédaigner la philosophie qui pose des questions fondamentales et qui transcend l'expérience. La seule philosophie légitime est celle qui s'occupe de l'analyse logique de la langue. Par contre, la rEC suit l'avis de Heisenberg qui dit que l'on ne peut échapper des questions philosophiques concernant la nature du monde et la nature du savoir humain dans l'effort de comprendre ce monde et ce savoir.

III- LA COMPLÉMENTARITÉ DES NOTIONS D'OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DE COMPRÉHENSION

Contemplons un instant les deux séries suivantes de mots

CROYANCES	MYTHES
PRÉJUGEMENTS	PRÉJUGÉS
PRÉ-CONCEPTIONS	MÉCONCEPTIONS
CONVICTIONS	IDÉES PRÉCONÇUES
SCHÉMAS INCONSCIENTS DE PENSÉE	HABITUDES INTELLECTUELLES

Tous ces mots décrivent nos manières de connaître. Mais, alors que les mots de gauche ont une connotation positive, il y a une certaine malaise dans ceux de droite: ils sont utilisés pour qualifier nos connaissances quand elles s'avèrent fausses, inadéquates etc.

Nous connaissons d'une certaine manière. Parfois il nous arrive de vivre un grand changement qualitatif de notre manière de connaître, de voir les choses. Ce

changement, nous l'appelons «acte de compréhension» ou «franchissement d'obstacle épistémologique» suivant le point de vue que nous prenons. Nous parlons de franchissement d'obstacle si nous regardons en arrière, si nous réfléchissons sur nos connaissances antérieures et sur ce qu'il y avait d'insuffisant, d'inadéquat ou de faux dans celles-ci. Mais si ce qui nous intéresse, ce sont nos connaissances futures, cette nouvelle manière de connaître que nous avons acquise, alors nous parlons volontiers d'un acte de compréhension, d'une illumination.

Acte de compréhension et franchissement d'obstacle épistémologique ne sont souvent (pas toujours, car il existe d'actes de C sans qu'il y ait forcément franchissement d'OE, mais tout franchissement d'OE est en même temps un acte de C) que deux images d'une même réalité : réalité inconnue de changements importants qualitatifs dans nos manières de connaître. Ces deux images sont complémentaires, car on ne peut pas prendre les deux perspectives en même temps et aucune des deux perspectives ne peut pas être négligée si notre description est censée d'être complète (cf. Heisenberg, 1969, p. 38; Sierpinska, 1990).

IV- BUTS DE r(EO)

On peut distinguer les buts suivants de r(EO) ; la liste n'est pas exhaustive et les buts ne sont pas indépendants.

- Diagnostic des difficultés des élèves vis-à-vis de l'apprentissage des mathématiques.
- Études épistémologiques des notions mathématiques.
- Évaluation des apprentissages, des enseignements et des matériels du point de vue de la construction des connaissances mathématiques.
- Élaboration des projets d'enseignement.

V- MÉTHODES UTILISÉES DANS LA r(EO)

Études de l'histoire des concepts mathématiques et connaissance de cette histoire jouent un rôle important dans la r(EO). Une des principales hypothèses de la r(EO) est bien celle qui dit que la signification d'un concept n'est pas totalement déterminée par sa définition actuelle mais elle est une résultante de l'histoire du concept et de ses diverses applications aussi bien dans le passé que dans le présent. On doit donc étudier l'histoire d'un concept pour pouvoir déterminer les conditions de sa compréhension.

c'est-à-dire pour en élaborer une analyse épistémologique. D'autre part, la connaissance de l'histoire des concepts est très utile dans les recherches diagnostiques sur les difficultés des élèves, plus particulièrement dans l'effort de comprendre leurs actions et verbalisations pendant les séances expérimentales. C'est parce que nous connaissons l'histoire que nous voyons plus, comprenons plus de ce que les élèves font ou disent. En interprétant leurs solutions et prises de parole nous faisons des analogies (pas nécessairement directes) avec les textes historiques. Le fameux «parallélisme» est une idée très simpliste qui ne peut pas être appliquée directement. En réalité, l'histoire nous aide à construire des modèles des conceptions des élèves sans toutefois nous apporter des modèles tout faits.

Ainsi, on peut dire, que dans la r(EO) l'étude historique des concepts est en même temps un objet et un outil de travail. On pourrait peut-être parler d'une approche ou d'une méthode «historique» lorsque les modèles des conceptions des élèves et les conditions de compréhension d'un concept particulier que l'on formule prennent en compte l'histoire de ce concept.

Il est peut-être caractéristique de la r(EO) que les concepts y apparaissent dans le double rôle d'objet d'étude et d'outil de recherche. La chose devient même plus compliquée avec la notion de compréhension. C'est bien un objet d'étude dans la r(EO): on cherche à savoir comment les élèves comprennent les mathématiques et comment on peut arriver à les leur faire comprendre dans l'enseignement. Mais c'est aussi un outil, à côté de la notion d'OE dans les analyses épistémologiques des concepts mathématiques (voir, par exemple Sierpinska, 1990). En même temps, c'est une méthode de recherche.

Dans la r(EO) il s'agit souvent de comprendre les textes (historiques, protocoles des séances expérimentales) ou comportement humain. L'herméneutique traditionnelle allemande avait distingué la compréhension comme méthode propre aux sciences humaines et l'avait opposé à l'explication qui ne peut s'appliquer qu'aux sciences naturelles (Dilthey, 1970). Cette opposition est contestée par l'herméneutique philosophique plus récente. En particulier, Ricoeur (1989), affirme que la compréhension ne peut pas être séparée de l'explication. Ces deux activités entrent dans une sorte de dialectique, où, au début, il y a une conjecture - un saisissement naïf du sens d'un texte comme un tout. Suit une période de justification, de tentatives de validation de la conjecture au cours de laquelle la conjecture est changée, améliorée, adaptée ou rejetée. La même activité recommence alors avec cette nouvelle conjecture et le processus continue jusqu'au moment où l'on peut dire que le texte a été compris. Ces procédures de validation sont propres au genre du texte analysé et correspondent à ce qui, traditionnellement, aurait été appelé explication.

Dans ce qui suit je vais présenter l'évaluation d'une leçon de mathématiques en explicitant la méthode de compréhension du texte du protocole de la leçon que j'utilise.

VI- ÉVALUATION D'UNE LEÇON DE MATHÉMATIQUES

1. Remarques générales

La leçon dont je vais parler a eu lieu dans un lycée de Varsovie en février 1995 dans une classe au profil humaniste. Le sujet annoncé par l'Enseignante était: «La limite d'une suite infinie». Les leçons qui précédaient celle-ci portaient sur les progressions arithmétiques et géométriques. La notion de suite infinie numérique avait été introduite comme un cas particulier de fonction: fonction de **N** dans **R**. Dans les leçons suivantes l'Enseignante avait l'intention de démontrer aux élèves les théorèmes sur la limite de somme (différence, produit et quotient) des suites et passer aux exercices qui consistent à calculer les limites des suites données par des formules algébriques de plus en plus compliquées.

Une première conjecture à propos de la valeur de la leçon était que l'enseignement ne consistait qu'à passer aux élèves la définition formelle de la notion de limite d'une suite et à leur montrer ensuite comment on démontre, par définition, qu'une suite donnée a_n a pour limite un nombre donné g. Dans le modèle de l'évaluation des leçons mathématiques de Steinbring (1988), basé sur le triangle épistémologique: Symbole - Objet - Concept, cela voulait dire que toute la leçon se trouve au niveau Symbole, qu'il n'y aucune prise de parole qui concerne les contextes où les définitions introduites sont interprétées et appliquées (Objet) et que ni l'Enseignante ni les élèves ne cherchent à trouver de lien entre ces définitions et leurs expériences dans d'autres domaines mathématiques ou non-mathématiques.

Cependant, une tentative à valider cette conjecture nous a amenés à la reviser. Une structuration plus détaillée du protocole de la leçon a montré que certaines prises de parole par l'Enseignante sont faites dans le but d'*expliquer* les définitions introduites, de donner du sens à ses démarches et qu'elle emploie certains moyens didactiques bien précis pour ce faire.

Nous nous sommes donc proposés de faire l'analyse de la leçon en trois pas.

Premier pas: **une première analyse globale**. Découverte du plan de la leçon: division de la leçon en phases qui se concentrent sur un même sujet.

Deuxième pas: **une analyse locale**. En analysant les prises de parole par l'Enseignante et les élèves dans chacune des phases de la leçon on cherche à savoir:

(1) Qu'est-ce qui, à un moment donné de la phase, est considéré par l'Enseignante comme **sujet local** de la leçon?

(2) À quoi l'Enseignante (ou les élèves) **se réfèrent-ils** pour trouver la signification et le sens d'un sujet local de la leçon?

(3) Comment fait-on pour trouver **les liens** entre un sujet local et une référence?

Troisième pas: **une deuxième analyse globale**. Dans cette deuxième analyse, on cherche premièrement, à catégoriser les «sujets locaux» de la leçon, les «références» et les «liens» utilisés pendant la leçon. Deuxièmement, on évalue les catégories utilisées à l'aide d'une analyse épistémologique de la notion de limite qui explicite les conditions de sa compréhension (comme, par exemple, dans Sierpinska, 1990).

2. Une première analyse globale de la leçon

Dans le protocole de la leçon, les prises de parole par les élèves apparaissent très rarement et ce sont des propos très courts, la plupart du temps des réponses par un seul mot aux questions de l'Enseignante.

La leçon était composée de cinq phases.

Phase 1. Introduction de la notion de voisinage de rayon epsilon d'un nombre (la lettre e sera utilisée par la suite pour dénoter epsilon).

L'enseignante commence par des définitions informelles et tend vers une définition formelle en termes de valeur absolue:

$$V(g, e) = \{x \in \mathbb{R} : |x - g| < e\}$$

Phase 2. Introduction de la définition de limite d'une suite infinie.

Une définition verbale est d'abord donnée par l'Enseignante aux élèves: «Nombre g est appelé limite d'une suite infinie numérique si et seulement si pour tout nombre positif epsilon il existe un nombre réel k tel que tous les termes de la suite à l'index plus grand que k appartiennent au voisinage de rayon epsilon du nombre g». Ensuite les

élèves sont priés d'écrire cette définition «à l'aide des quantificateurs». Non sans difficultés, une définition formelle apparaît finalement au tableau:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n > k \ |a_n - g| < \varepsilon$$

L'Enseignante souligne le rôle de chaque élément de la définition et exprime des définitions informelles de limite.

ENS «Être placé dans ce voisinage, c'est être un nombre tel que sa distance du nombre g est moindre que ε.»

ENS «Voilà ce que cela veut dire: à partir d'un index qui est plus grand que k tous les termes de la suite trouveront une place à l'intérieur du voisinage de rayon ε du nombre g.»

ENS «Cela veut dire qu'ils seront si près du nombre g que leur distance de ce nombre sera moindre que l'epsilon donné.»

ENS «Remarquez que la définition commence par les mots: pour tout epsilon. Cela veut dire que ε peut être choisi aussi petit que l'on veut.»

ENS «Si petit que soit le voisinage du nombre g que nous choisissions, il contiendra beaucoup (...) un nombre infini de termes de la suite ... Parce que k peut être établi énorme. Mais ce k ne coupera que les premiers termes de la suite. Même si c'est un million de termes, ceux qui doivent trouver une place à l'intérieur du voisinage forment une majorité, il y en a une infinité.»

ENS «À partir d'un certain rang, tous les termes trouveront une place dans ce voisinage.»

Phase 3. Visualisation de la limite d'une suite

Cette visualisation consiste à dessiner, dans le plan de coordonnées, une dizaine de points isolés disposés comme sur une hyperbole y = 1 + 1/x, x>0. On ne compose pas de graphique d'une suite dont la formule serait donnée d'avance.

L'Enseignante compare, en effet, la ligne des points à une hyperbole qui s'approche de son asymptote. Elle explique comment les points du «graphique» représentent une suite en tant qu'une fonction; elle montre où en sont les arguments et où sont les termes : les valeurs. Ensuite elle se propose de «démontrer que le nombre 1 est la limite de cette suite». Elle prend l'intervalle $(g - e, g + e)$ sur l'axe vertical, dessine les droites $y = g - e$ et $y = g + e$ et dit:

ENS: «Ce terme là, trouvera-t-il une place dans le voisinage que nous avons choisi? Non. Et celui là? Non plus. Et celui là? Non, mais ça ne fait rien. Celui-là? Non. Mais le 15ème terme y sera déjà. Supposons que $k=14$ et à partir du 15ème terme ... Donc seulement 14 termes n'ont pas trouvé de place»

Le dessin n'est pas très précis et le 15ème terme n'est pas visible.
L'Enseignante dit ensuite:

ENS: «Bon, vous direz que le voisinage est grand, qu'on peut voir du dernier banc ... et il faut qu'on ait pour tout voisinage ... Alors prenons un voisinage plus petit, aussi petit qu'on veut ...»

ELEVE: «Et il y aura une infinité ...»

ENS: «Il y aura une infinité de termes. Tous les termes, à partir d'un certain rang.»

Phase 4. Définition informelle de limite en termes de «presque tous les termes» de la suite

ENS: «Je veux dire que dans le voisinage du nombre que nous voulons appeler limite, il y a de la place pour presque tous les termes de la suite ... Presque tous les termes, cela veut dire: tous sauf un nombre fini de termes.»

Phase 5. Problèmes: démontrer par définition, que la suite donnée a_n a pour limite le nombre donné g

(1) $a_n = 1/n$ $g = 0$

(2) $a_n = (2n - 1)/n$ $g = 2$

(3) $a_n = (n^2 + 1)/3n^2$ $g = 1/3$

Le premier problème est résolu par l'Enseignante avec un très faible concours de l'élève au tableau. Cette solution est traitée comme modèle de solution de ce genre de

problème. Le schéma de cette solution est expliqué par l'Enseignant :

ENS : «Vous écrivez au point 2 que vous avez à vérifier la vérité de la proposition ... et au lieu de a_n vous écrivez non plus 1/n mais cette formule là, et au lieu de g vous écrivez 2. Et ensuite, sous la valeur absolue vous réduisez au dénominateur commun et vous transformez l'inégalité de façon à obtenir le n d'un côté et une expression avec ε de l'autre. Alors il vous sera très facile de déterminer si la proposition est ou n'est pas vraie.»

3. Deuxième analyse globale de la leçon

Cette analyse n'aurait pu être faite sans une méticuleuse analyse locale. Mais dans le texte présent, nous ferons grâce au lecteur du protocole de la leçon et du travail de qualification individuelle des prises de parole.

Le protocole a été divisé en unités, chaque unité ne comprenant pas plus qu'une catégorie de «sujet local», «référence» ou «lien». Le nombre total d'unités ainsi définies est 116.

3.1 Catégories des sujets locaux de la leçon et leur évaluation épistémologique

Le nombre d'unités du protocole comprenant une définition du sujet de la leçon est 83 (72% du nombre total d'unités).

Les catégories le plus répandues de sujets locaux sont celles qui concernent les DÉMONSTRATIONS (27 unités) et les DÉFINITIONS (24 unités).

La catégorie des DÉMONSTRATIONS comprend :

- formulation du problème de démontrer qu'une suite donnée a_n a pour limite un nombre donné g ;
- interprétation de ce problème en termes logiques.

ENS : «Vérifier, par définition, si le nombre g, dans notre cas le nombre 0 est la limite de cette suite, cela veut dire qu'il faut vérifier si le nombre 0 satisfait cette définition par rapport à la suite non plus arbitraire mais bien concrète, sa formule est donnée. Il faut vérifier la valeur logique de

cette proposition (...) Si cette proposition est vraie [ENS montre «Vε>0 ...»] alors cette proposition-là est aussi vraie [ENS montre «... $|a_n - g|$ ...»] cela veut dire que le nombre 0 est la limite de la suite 1/n parce que ces deux propositions sont logiquement équivalentes, n'est-ce pas?»

- démonstrations;
- formulation de solution de problème de démonstration;
- formulation du schéma de démonstration.

L'Enseignante présente le passage à la limite comme une opération mathématique qui attribue un nombre unique bien déterminé à certaines suites. Mais, premièrement, aucun exemple ne mène les élèves à se rendre compte qu'il existe des suites pour lesquelles ce nombre n'est pas déterminé: toutes les suites considérées par l'Enseignante sont convergentes. On ne donne pas de chance aux élèves d'identifier les suites convergentes parmi d'autres suites possibles. Deuxièmement, l'opération de passage à la limite, à part d'être une opération mathématique, est un outil heuristique puissant en même temps qu'une méthode rigoureuse de vérification de conjectures sur des relations entre les quantités variables. Aucune de ces caractéristiques n'avait pas de chances d'être appréciée par les élèves pendant la leçon. Pourtant, il serait facile de laisser les élèves d'abord deviner les limites des suites proposées dans le «problème de démonstration» et seulement ensuite leur demander de prouver leurs conjectures.

Nous avons rapporté plus haut la manière dont l'Enseignante formule le schéma de démonstration. Ce schéma est une suite d'instructions pour écrire une démonstration. Un élève peut être capable de suivre cette liste d'instruction parfaitement technique même sans avoir compris la notion de limite d'une suite.

La catégorie des DÉFINITIONS comprend:
- formulation de définition formelle;
- formulation de définition informelle;
- reformulation de définition en d'autres termes;
- formalisation de définition;
- introduction d'un nouveau terme ou symbole;
- rédaction de définition;
- définition ostensive.

La part des élèves était très faible dans les activités ci-dessus: l'Enseignante ne leur demandait que de reformuler une part de définition en d'autres termes. Par exemple - de remplacer une inscription comme «$-\varepsilon < x - g < \varepsilon$» par une expression «plus concise» (elle pensait à «$|x - g| < \varepsilon$»).

Il y a plusieurs obstacles à franchir dans la formalisation de la notion de limite d'une suite. Dans le passage de l'algèbre scolaire aux débuts de l'analyse il faut se rendre compte du changement des rôles des variables. En algèbre une lettre désigne soit une inconnue, soit une grandeur qui peut admettre une ou plusieurs valeurs différentes (grandeurs variables ou constantes). En logique une lettre – une variable – est le nom d'un élément arbitraire d'une classe et en analysant une inscription comprenant des variables il est intéressant de savoir lesquelles des variables sont libres et lesquelles sont liées par les quantificateurs. On distingue les prédicats, qui sont des conditions, des propositions qui peuvent être vraies ou fausses. En formalisant la définition de la limite d'une suite il faut se garder de mettre la variable a_n sous quantificateur: elle doit rester libre pour que le *definiens* exprime une condition sur les suites. En disant, par exemple, qu'à partir d'un certain rang **tous les termes de la suite** appartiennent déjà au voisinage ... etc. il faut être conscient du fait que, pour une suite donnée, un terme est bien déterminé par son index et qu'il suffit alors de poser des conditions sur les index «∀n» au lieu de «∀a_n».

La compréhension de la définition formelle de limite d'une suite demande donc au moins:

- une distinction entre l'emploi des lettres dans l'algèbre et dans la logique;
- une identification du rôle des arguments d'une suite (en tant qu'une fonction) comme index des valeurs-termes.

L'Enseignante ne discute pas avec les élèves ces problèmes; elle assume que cette distinction et cette identification viennent tout naturellement dans l'apprentissage. Elle traduit l'expression «tout terme à l'index plus grand que k» par «tout index plus grand que k» sans explication:

ENS: «Écris que tout terme à l'index plus grand que k, soit: tout index n plus grand que k ... soit ... pour tout n plus grand que k.»

Dans l'histoire de la formalisation de la notion de limite il a fallu mathématiser les notions «d'approchement» et «d'approchement indéfini» des termes d'une suite à la limite, objectiviser et dépersonnaliser ces idées dynamiques en termes statiques de **distance** entre les nombres, notion qui a été ensuite définie à l'aide de la notion de valeur absolue. Il n'est pas donné aux élèves dans cette leçon de vivre cette objectivation et cette dépersonnalisation. Elle leur est donnée toute faite et les élèves sont incapables d'en apprécier la valeur théorique. Tout ce qu'on leur demande de faire est de considérer comme équivalentes les expressions «$-\varepsilon < x - g < \varepsilon$», «$|x - g| < \varepsilon$» et «la distance entre x et g est moindre que ε».

ENS: «Chers amis! Si là, j'ai le nombre g et ici le voisinage à rayon ε, alors être dans ce voisinage veut dire être un nombre dont la distance du nombre g est moindre que ε. D'accord?»

[Silence]

ENS: «Comment exprime-t-on la distance entre deux nombres?»

[Silence]

ENS: «La valeur absolue de la différence entre eux. Alors voilà ce que dit la définition: tous les termes, à partir de l'index qui est plus grand que k, trouveront une place dans le voisinage à rayon ε du nombre g»

Un autre problème conceptuel que les élèves auraient à résoudre pour comprendre la définition de limite qui leur a été proposée par l'Enseignante est celui de la signification de la condition «$\exists k \in \mathbb{R}$». Le remplacement de cette condition par la condition «$\exists k \in \mathbb{N}$» mène à une définition logiquement équivalente mais beaucoup plus facile conceptuellement. Cette dernière ne demande pas que les élèves conçoivent la suite comme un cas particulier de fonction, les index comme les nombres naturels qui sont, à leur tour, un sous-ensemble des nombres réels. Il suffit de concevoir les suites comme des listes de nombres et les index comme des «numéros» et non pas des nombres.

Dans la vérification si la limite d'un suite a_n est bien g, la recherche d'un k naturel signifie que l'on cherche à partir de quel numéro tous les termes de la suite sont déjà dans le voisinage donné de g. On montre du doigt le terme crucial. La recherche d'un k réel ne donne pas cette satisfaction. On ne définit pas le terme crucial: il doit nous suffire que nous savons, théoriquement, qu'un tel terme existe. Bien sûr, l'exigence que k appartienne aux naturels demande plus de travail (et de connaissances mathématiques - fonction Entier, fonction logarithme parfois, ...) lors de la démonstration et c'est peut-être la raison pour laquelle l'Enseignante avait choisi de prendre la définition avec k réel.

Autres catégories de sujets locaux pendant cette leçon étaient: TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES (8 unités), RÉACTIONS À L'ERREUR DE L'ÉLÈVE (7 unités), REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES DES OBJETS MATHÉMATIQUES (4 unités), THÉORÈMES (1 unité: théorème: $\lim 1/n = 0$).

Voici quelques ERREURS des élèves (on donnera d'autres exemples d'erreurs des élèves dans les parties ultérieures de ce texte).

(1) A la formalisation de la définition de limite, pour traduire en symboles la condition «les termes a_n (...) appartiennent au voisinage de rayon ε du nombre g», l'élève au tableau voulait mettre «$a_n \in$ $\mathscr{O}$ (g,ε)» mais l'Enseignante ne l'a pas laissé faire:

ENS: «Non! La dernière inscription, s'il vous plaît! [il s'agit de la dernière définition formelle du voisinage en termes de valeur absolue] Valeur absolue de a_n moins g, etc.»

L'élève écrit: «$|a_n - g| <$» traduisant par symbole «<» le mot «appartient».

L'obstination de l'Enseignante n'est pas justifiée. En fait, elle a changé la tâche de l'élève pendant qu'elle était en train de la résoudre. Il ne s'agissait d'abord que d'écrire en symboles ce qui a été dit avec des mots, et maintenant il s'avère qu'il faut encore reformuler la définition.

(2) Pendant la résolution du problème de démonstration, il s'agissait de vérifier si pour un ε donné il existe un k tel que pour tout n≥k, n > 1/ε.

ENS: «Je prends un nombre positif quelconque. Je l'ai. Maintenant je prends l'inverse de ce nombre et je pose la question si je suis capable de trouver un rang tel qu'à partir de ce rang tous les nombres naturels seront déjà plus grands que ce nombre.»

En ce moment une élève dit:

ÉLÈVE: «Si pour ε nous prenons 1 alors n=1 ne satisfait pas ...»

L'erreur de l'élève consiste en ce qu'elle ne prend pas compte de la condition que l'inégalité $n > 1/\varepsilon$ doit être satisfaite à partir d'un certain rang. L'élève considère la proposition «∀ε>0 ∀n n> 1/ε». C'est une erreur logique. La réaction de l'Enseignante consiste à souligner l'essentialité de la condition de l'existence de k et à montrer que pour ε=1 il existe un k tel que pour n≥k $n > 1/\varepsilon$, c'est-à-dire $n > 1$. «Il suffit de prendre k = 1,5. Cela veut dire qu'à partir du nombre naturel 2 tout va bien». Malgré ces explications la réponse à la question posée par l'Enseignante n'apparaît pas tout de suite. Alors elle reformule la question:

ENS «Alors? Est-ce que je suis toujours capable de trouver un nombre naturel plus grand que quelque chose?»

[Silence]

ENS «Oui ou non?»
ELÈVE «Ben ... oui»

Cette dernière question est triviale mais elle cache tous les quantificateurs et les élèves ne sont plus sûrs s'il s'agit de la même question qu'avant. Le lien entre ces questions n'est pas explicité par l'Enseignante.

Les REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES concernaient d'abord la notion de voisinage à rayon ε d'un nombre et ensuite la notion de limite d'une suite. La notion de voisinage d'un nombre a été introduite, en fait, comme modèle arithmétique d'un cas particulier du voisinage d'un point dans l'espace à n dimensions. L'Enseignante a rappelé aux élèves la notion de voisinage d'un point dans le plan.

ENS «Nous avons parlé de voisinages dans le plan en géométrie; nous avons parlé de voisinages circulaires, nous avons dessiné le voisinage circulaire d'un point, c'est-à-dire un cercle d'un certain rayon et de centre au point dont le voisinage a été considéré.»

Et maintenant, pour présenter la notion de voisinage d'un point sur la droite comme cas particulier de la notion de voisinage dans le plan, l'Enseignante devait faire traiter la droite par les élèves comme un espace à dimension 1 et le plan comme un espace à dimension 2 - donc généraliser les notions de droite et du plan.

ENS «A quoi se réduit un disque ouvert comme cela dans l'espace à une dimension? (elle dessine une droite).»

Dans la suite l'Enseignante parle de cet «espace à dimension un» comme parfois «une droite» et parfois «un axe numérique». Ce faisant elle introduit la structure d'espace cartésien dans les espaces qu'elle considère. En disant «nombre q» elle passe à parler du voisinage d'un nombre.

ENS «Voici le nombre q. Je considère le voisinage de rayon ε de ce nombre. A quoi se réduit tout le disque si tout mon univers de discours n'est que l'espace à dimension un, cet axe numérique, et non plus tout le plan, hm?»

L'Enseignante attend probablement la réponse «un intervalle» mais le rappel du contexte géométrique fait que les élèves répondent «à un segment» et il ne leur est pas facile de deviner qu'il s'agit de répondre «intervalle». Ils disent «ensemble», «suite bornée» (???). Finalement, un des élèves dit «intervalle» et les élèves trouvent alors facilement les nombres qui correspondent aux extrémités du segment: $g-\varepsilon$ et $g+\varepsilon$.

Le sens d'introduire la notion du voisinage d'un nombre (avec symbole spécifique et définition formelle) pendant cette leçon est assez problématique. Peut-être que l'Enseignante voulait pourvoir ses élèves avec une gamme aussi large que possible de formulations de définition de la limite d'une suite. Mais elle n'utilise pas le symbole du voisinage dans la définition de limite (en fait, elle interdit à l'élève de mettre «$x_n \in \sigma(g,\varepsilon)$» dans la définition et l'oblige à utiliser le symbole de valeur absolue). La notion de valeur absolue et son sens comme distance auraient bien suffi pour ces élèves qui n'iront jamais étudier la notion de limite dans les espaces topologiques autres que $\mathbb{R}$ avec la métrique habituelle.

Toute la phase 3 de la leçon est consacrée à la visualisation de la notion de limite d'une suite. Nous avons présenté cette visualisation plus haut. L'intuition que l'Enseignante construit ici chez ces élèves est une intuition géométrique de la notion de limite qui est, en fait, un obstacle à la compréhension de la notion de limite d'une suite numérique. Cette intuition consiste à concevoir la convergence comme un processus de «devenir de plus en plus semblable à ...». L'hyperbole devient de plus en plus semblable à une droite qui est son asymptote, le 2^n-gone inscrit ou circonscrit au cercle diffère de moins en moins du cercle, la sécante est de plus en plus difficile à distinguer de la tangente. Dans cette intuition il est inutile de détacher les aspects quantitatifs d'une figure géométrique ou de sa position de la figure elle-même. Quand on dit qu'une «hyperbole tend vers son asymptote», on fait appel à une métaphore qui est basée sur cette intuition géométrique de devenir de plus en plus semblable. Le mathématicien du XXe siècle mesure cet «approchement» par les distances entre les points qui correspondent l'un à l'autre dans une certaine application: les nombres $|f(x) - 1|$ diminuent quand x tend vers l'infini. Nous avons à faire ici avec la convergence d'une fonction lorsque x tend vers l'infini. Mais les élèves dans notre classe n'en sont pas encore conscients. Ils prennent la métaphore littéralement et construisent un obstacle pour la compréhension de la notion de limite. C'est cet obstacle qui fait qu'il est très difficile d'accepter que la longueur d'une ligne brisée (voir figure ci-dessous) n'approche pas la longueur de la ligne droite bien que la forme de la ligne brisée est de plus en plus semblable de la forme de la ligne droite.

Le graphique utilisé par l'Enseignante pour visualiser la notion de limite n'est pas très précis. Il ne représente aucune suite concrète, donnée, par exemple, par une formule. Cela peut mener à concevoir le dessin comme représentant une suite «typique» et un comportement «typique» d'une suite convergente. S'il est vrai, comme dit Dewey (1910), que l'homme généralise à partir du premier exemplaire rencontré, alors il y a un risque que les élèves soient persuadés que toutes les suites convergent de façon monotone, tendent «régulièrement» dès le premier terme etc.

Cette imprécision intentionnelle du dessin fait qu'une concrétisation véritable des conditions de la définition avec un ε donné n'est pas possible. Dans ces conditions, l'attribution d'un rang k à un ε donné devient une activité tout aussi abstraite que sans le dessin.

3.2 Catégories de références auxquelles on fait appel pour donner une signification aux sujets locaux et évaluation du choix de ces références

Le nombre d'unités du protocole se rapportant aux références est 63 (ce qui constitue 54% du nombre total d'unités).

L'Enseignante se référait surtout aux SAVOIRS INTRODUITS ANTÉRIEUREMENT (27 unités), à savoir aux notions d'analyse et d'algèbre, de logique et de géométrie. À part cela, elle se référait aux SIGNIFICATIONS COURANTES DES MOTS, aux SAVOIRS INTRODUITS RÉCEMMENT, aux EXEMPLES «CONCRETS».

Les références à l'algèbre et l'analyse comprenaient les notions telles que: axe numérique, intervalle, valeur absolue, inéquations avec valeur absolue, suite comme fonction sur **N**, les propriétés du zéro ($a + 0 = a$), les techniques de résolution d'inéquations, la propriété des nombres naturels d'être positifs, d'être un ensemble illimité, la fonction homographique.

Les références à la géométrie portaient sur les notions de voisinage d'un point
dans le plan, espace à un et espace à deux dimensions, la notion géométrique de
distance. Quant à la logique, l'Enseignante se référait à la conjonction logique (une
inéquation double est conjonction de deux inéquations), au fait de la transitivité de
l'équivalence de propositions, aux rapports entre les valeurs logiques de deux
propositions équivalentes, à la notion de vérification d'une définition par un objet
mathématique.

Les références à l'analyse et à l'algèbre ne comprenaient pas les connaissances
relatives aux nombres réels, à leurs développements décimaux, à l'ambiguïté de la
représentation décimale des réels, aux approximations des réels par des suites de
nombres rationnels, au sens de la multiplication de deux nombres réels a et b lorsque
a(b) n'est pas rationnel), au calcul approximatif des racines des équations ... bref, à tout ce
qui dans la notion du nombre réel donne du sens à la notion de limite. L'Enseignante n'a
même pas fait appel aux suites arithmétiques et géométriques qui ont été considérées en
classe juste avant la leçon discutée ici. Les références à la géométrie n'évoquaient pas les
notions d'aire d'un cercle ou d'autres régions curvilignes et les moyens de les calculer (à
celle de l'aire d'un rectangle aux côtés incommensurables (cf. Sierpinska, 1990g)).

On n'a pas donné de chance aux élèves de découvrir que les suites numériques
peuvent être un objet intéressant à étudier, et qu'il existe des suites qui ont des
propriétés très utiles dans le calcul de certaines magnitudes. Pourtant cette découverte
ou prise de conscience est une première condition pour comprendre la notion de limite
d'une suite numérique (cf. Sierpinska, 1990).

L'Enseignante n'a pas essayé de soulever la question si la suite «atteint ou
n'atteint pas sa limite» (que ce soit par l'évocation des paradoxes de Zénon ou autre
moyen, cf. Sierpinska, 1987). Cette question a joué un rôle important dans la
clarification de la notion de limite dans l'histoire. Une discussion en classe du
problème donne à l'enseignant l'occasion de mettre au clair la notion de suite, comparer
diverses conceptions de l'infini et philosophies des mathématiques. Elle permet aux
élèves de prendre conscience que le problème «limite atteinte ou pas» est un problème
philosophique qui n'a pas de solution univoque. Dans la lumière de cette prise de
conscience, la définition formelle de limite apparaît comme une solution théorique de
haute qualité, acceptable pour tous les mathématiciens, quelque soit leur philosophie
des mathématiques et conception de l'infini (ibidem).

Il y avait 5 exemples «concrets». Un de ces exemples était la suite donnée par son
graphique. Comme nous l'avons dit plus haut, cet exemple n'est qu'apparemment
concret. Un exemple vraiment concret du nombre e et du k correspondant est en quelque

suite lancé par une erreur de l'élève. Pendant la résolution du problème de démonstration que la limite de la suite $1/n$ est 0, quand la question a été réduite à la question du choix du nombre k tel que pour $n > k$, n soit plus grand que $1/\varepsilon$, un des élèves a dit qu'il suffit que k soit égal à 1. Les élèves n'ont pas compris que k est une fonction de ε. Ce n'est que maintenant que l'Enseignante prend un ε bien concret, $\varepsilon = 1/100$ et montre que si k était égal à 1, alors à partir de $n=2$ on devrait avoir $n > 100$ ce qui est absurde. Ce n'est qu'une réfutation d'une proposition de l'élève. L'Enseignante ne prend pas diverses valeurs de ε et ne demande pas aux élèves de trouver les nombres k correspondants.

Un champ de référence important est celui des SIGNIFICATIONS COURANTES DES MOTS. L'Enseignante cherche des mots qui provoquent des images très familières et les emploie avec conséquence dans ses définitions à la place des mots utilisés normalement dans les définitions verbales. Ces mots et expressions (en polonais) ne sont pas traduisibles en français: traduits littéralement, ils perdent le sens qu'ils ont en polonais. À la place de «les termes appartiennent au voisinage...» l'Enseignante dit quelque chose comme «les termes vont trouver une place dans le voisinage» ce qui donne l'image du voisinage comme un endroit très étroit, dans lequel il est difficile de trouver une place. Alors dans une seule expression, un même mot, il y a deux choses: la relation d'appartenir et le quantificateur général $\forall\varepsilon$.

Ce dernier quantificateur est souvent traduit par l'expression familière: «aussi petit que l'on veut». On fait ainsi appel au libre vouloir de celui qui parle. Le quantificateur existentiel est traduit, à son tour, par une certaine «possibilité», malgré certaines contraintes, de celui qui parle: «∃ k» veut dire que «je peux trouver», «je peux choisir», «je suis toujours capable de trouver un nombre naturel plus grand que quelque chose».

Appel aux significations courantes des mots, aux métaphores et aux images qu'elles provoquent est un outil souvent utilisé dans les cours ou textes de vulgarisation des mathématiques. Pourtant on peut douter de l'efficacité de cet outil. Quelqu'un qui ne connaît pas les mathématiques qui sont ainsi «expliquées», ne peut pas savoir quelles sont les parties de l'image provoquée par la métaphore qu'il faut garder comme essentielles, comme formant la base de l'analogie et lesquelles sont superflues et il faut les ignorer. On a l'impression d'avoir compris quelque chose et en fin de compte on ne s'est construit que quelques nouveaux obstacles qu'il peut être très difficile à franchir en apprenant les mathématiques en question.

3.3 Catégories de moyens utilisés par l'enseignant pour provoquer chez les élèves la perception des LIENS entre les sujets locaux de la leçon et les références. Évaluation de ces moyens

Le nombre d'unités du protocole consacrées à provoquer chez les élèves la perception des liens entre les sujets locaux et les références était 59 (51% du nombre total d'unités).

Les moyens utilisés par l'Enseignante étaient les suivants:

(1) Méthode de RAPPEL EN MÉMOIRE (20 unités)

- l'Enseignante laisse aux élèves de compléter les phrases qu'elle commence ou dont ne prononce que certains mots: elle suspend la voix et attend que les élèves réagissent. Par exemple, en essayant de rappeler aux élèves que la condition «|x − a|<ε» est équivalente à «−ε < x − a < ε», l'Enseignante dit:

ENS: «Rappelez-vous la plus simple inéquation avec valeur absolue: comment on la résolvait. Si |x| < 5 alors ... qu'est-ce qui se passait? ... x doit être ... comment?»
ÉLÈVE: «Par exemple ... prenons par exemple ...»
ENS: «x doit être ... comment?»
ÉLÈVE: «positif, plus grand que zéro»
ENS: «Pourquoi positif? Moindre que 5 et ...»
ÉLÈVE: «Moindre que 5 et ...»
ENS: «Allons! Mais voyons ... (elle écrit: «x < 5»)»
ENS: «Puis-je me promener où je veux avec cet x? (Elle dessine:

ENS: «Non! x plus grand que ...»
ÉLÈVE: «moins cinq»

- méthode de recherche «à l'aide d'un catalogue», par exemple, en essayant de faire rappeler aux élèves la notion de voisinage circulaire d'un point, l'Enseignante indique d'abord le domaine des mathématiques auquel cette notion appartient («nous avons parlé des voisinages dans le plan en géométrie»); elle prononce le nom d'un concept plus général (voisinages dans le plan), ensuite le nom du concept dont il s'agit («nous y avons parlé des voisinages circulaires, nous avons dessiné le

voisinage circulaire d'un point» et ensuite elle donne une définition informelle du concept (c'est-à-dire un disque d'un certain rayon et centré au point dont le voisinage nous considérons).

- appel à la forme ou schéma de la formule à se rappeler: par exemple, l'Enseignante dit que la formule cherchée doit être plus «courte» que la formule présente. Ou elle attire l'attention des élèves sur le schéma de l'inégalité «$-\varepsilon < x - g < \varepsilon$» en disant qu'il s'agit d'une inégalité double «qui dit que quelque chose est plus petit qu'une magnitude positive et plus grand que la magnitude opposée».

- dicter: l'Enseignante indique directement le savoir qui doit être rappelé, en montrant du doit l'endroit qu'il faut dans le cahier de l'élève ou en dictant la formule, le terme ou autre chose.

(2) Moyens de baser la signification des sujets locaux sur les significations courantes de mots.

- l'Enseignante écrit une définition en langue symbolique au tableau et l'exprime en même temps avec des mots.

- elle utilise avec conséquence certains mots-images, mots-métaphores dans les définitions informelles, en remplaçant toujours le même terme mathématique par le même mot-image.

- pendant la formalisation d'une définition, elle transforme graduellement une expression informelle en une expression qui ressemble de plus en plus à l'expression symbolique. Par exemple:

  ENS: «Écris que tout terme à l'index plus grand que k, autrement dit: tout index n plus grand que k ... oui ... pour tout n plus grand que k».

- en transformant les inégalités telles que, par exemple, «$g - \varepsilon < x < g + \varepsilon$» l'Enseignante emploie des expressions du jargon scolaire des élèves et non pas le langage correct des mathématiques. Elle dit: «transposons g à l'autre côté de l'inégalité» et non pas «ajoutons g aux deux côtés de l'inégalité».

- l'Enseignante parle des termes de la suite comme si c'étaient des êtres humains : ce moyen de faire les liens pourrait être appelé «antropomorphisation» des objets mathématiques.

* il y a aussi une «généralisation» des opérations mathématiques. l'Enseignante dit: «je dois trouver un δ pour un ε donné», «suis-je capable d'en trouver un» etc.

(5) En se référant à une représentation géométrique l'Enseignante explicite parfois les correspondances entre les éléments de la visualisation et les notions ainsi visualisées (par exemple, elle montre comment le graphique utilisé dans la phase 3 de la leçon représente une suite, où en sont les arguments, les valeurs (6 unités).

(6) Pour faire le lien entre le savoir rappelé aux élèves et le savoir qu'elle introduit, l'Enseignante a souvent recours aux procédures déductives. La notion du voisinage de rayon ε d'un nombre est un cas particulier de la notion du voisinage d'un point dans un espace topologique à n dimensions. Une suite est une fonction: «donc on peut dessiner son graphique». Déduction est utilisée dans certaines réactions de l'Enseignante à l'erreur de l'élève (7 unités).

Le reproche que l'on peut faire à ces moyens de faire le lien entre les sujets locaux et les références est qu'ils permettent aux élèves de rester complètement passifs. Les méthodes de rappel et les moyens de référence aux images familières sont basés sur une sorte de psychologie associativiste de développement des concepts. Les moyens de présenter les visualisations et de faire le lien entre le savoir rappelé et le savoir introduit prennent surtout soin de l'exactitude et de la pureté des mathématiques et n'ont aucun égard aux connaissances des élèves, à leurs conceptions et leurs difficultés.

3.4 Moyens de donner du sens aux activités entreprises pendant la leçon

On peut se poser la question quels sont les moyens qu'utilise l'Enseignante pour donner du sens aux activités qu'elle entreprend: comment fait-elle pour que les élèves veuillent rester en classe et écouter ce qu'elle dit? Bien sûr, les élèves sont censés de respecter le contrat social et de rester dans leurs rôles d'élèves et tout refus de participer dans les activités proposées par l'Enseignante peut être puni. Mais sans recours à des méthodes «administratives», l'Enseignante montre aux élèves qu'elle fait bien son travail de professeur de mathématiques, que quant à elle, elle remplit bien son rôle et alors elle a le droit d'attendre la même chose des élèves. Les moyens qu'elle utilise sont les suivants:

* l'Enseignante annonce le thème de la leçon; le titre comprend des mots tels que «limite», «suite». Ceci justifie l'introduction, pendant la leçon, de définition de limite d'une suite. L'éclaircissement des termes annoncés dans le sujet de la leçon devient un but valable pour les élèves.

- l'Enseignante annonce aussi les sous-thèmes tels que «voisinage», «problèmes» etc.

- les parties plus longues de la leçon sont récapitulées.

- les démonstrations des faits du type $\lim a_n = 0$ sont opérationnalisées de façon à ce que les élèves sachent qu'est-ce qu'il faut écrire et faire pour obtenir une démonstration. Cette activité de démonstration pourrait n'avoir aucun sens pour les élèves qui ne comprennent pas la notion de limite. Mais l'apprentissage de certaines activités dans le but de réussir à un test devient une occupation qui a du sens pour eux.

V. REMARQUES FINALES

La seule analyse quantitative de la leçon pourrait nous faire croire que la leçon était assez bonne: la répartition des «sujets locaux», «références» et «liens» était 60%, 54% et 51%. Plus de 50% d'unités du protocole consacrées aux «liens», ce n'est déjà pas mal! En plus, 21% d'unités contenaient les tentatives de l'Enseignante de donner du sens aux activités qu'elle proposait aux élèves. Cependant, une évaluation du point de vue épistémologique de la leçon amène une déception. Les élèves n'avaient pas de chance de commencer à comprendre la notion de limite d'une suite pendant cette leçon.

Après ma présentation de l'évaluation ci-dessus au séminaire du CIRADE, on m'a posé la question: bon, vous nous avez convaincu que la leçon était de qualité médiocre, mais pouvez-vous nous dire quelle serait, d'après vous, une bonne leçon sur les limites? C'est la question qui ne manque jamais d'apparaître au cours de nos activités avec les enseignants.

En effet, la question n'est pas facile en même temps qu'elle est de première importance tout autant pour les enseignants que pour les chercheurs. J'avais essayé de donner quelques indications et suggestions de ce que serait, d'après moi, une bonne leçon sur les limites dans le texte écrit de ma conférence. Mais je me rends très bien compte que tout ceci est encore bien insuffisant.

RÉFÉRENCES

Dilthey, W. (1970). Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften. Frankfurt A.M.

Dewey, J. (1988). Jak myślimy? PWN, Warszawa (Polish translation of «How we think»; first published in USA in 1910.

Heisenberg, W. (1980). Physics and philosophy. Penguin Books.

Heisenberg, W. (1973). Der Teil und das Ganze. R. Piper & Co Verlag, München.

Moscovici, S. (1989). A propos des notions d'obstacle et conflit socio-cognitif. In: Construction des savoirs. Obstacles et conflits., N. Bednarz & C. Garnier, Eds. CIRADE, UQAM, Agence d'ARC Inc., Montréal, p. 390-398.

Ricoeur, P. (1989). Język, tekst, interpretacja. PIW, Warszawa (Polish translation from: Interpretation theory: Discourse and the surplus of meaning; La tâche de l'herméneutique; La fonction herméneutique de la distanciation; La métaphore et le problème central de l'herméneutique; Appropriation).

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics 18, p. 371-397.

Sierpinska, A. (1990$_1$). Remarks on understanding in mathematics. Proceedings of the 14th Meeting of the CMESG, Vancouver, May 1990 (to appear).

Sierpinska, A. (1990$_2$). Epistemological obstacles and understanding: two useful categories of thought for research into teaching and learning mathematics. Proceedings of the 2nd International Symposium on the Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, August 1990 (to appear).

Steinbring, H. (1988). Construction of meaning in the mathematics classroom. Talk given at the SCTP Conference, London.

Bon de commande

no 49 Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique .... x 2,50$ ....

Ajoutez 20% pour les frais d'envoi, d'emballage et de manutention ....

Total ....

Veuillez retourner votre commande dûment remplie à:

Guylaine St-Pierre
CIRADE, X-7115
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal (Québec), Canada, H3C 3P8
pour informations: (514) 987-6186

Les commandes doivent être accompagnées du paiement par chèque, fait à l'ordre du CIRADE.

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage
et le développement en éducation
Université du Québec à Montréal
Pavillon Sainte-Catherine Ouest
815, rue Sainte-Catherine Ouest
Local X-7115

Case postale 8888, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3P8

Tél.: (514) 282-6188

Pour commander, remplir le formulaire de réquisition apparaissant à la dernière page du document.

Publié par le Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage
et le développement en éducation

Conception graphique: Pierrette Pelletier